**Лекция 1. Абсолютная устойчивость положение равновесия в основном случае. Постановка задачи. Неособое преобразование**

**Постановка задачи.** Дифференциальное уравнение регулируемых систем в основном случае имеет вид:

 (1.1)

где  – постоянные матрицы порядков  соответственно, матрица  – гурвицева, т.е.  – собственные значения матрицы 

Нелинейная система автоматического управления с уравнением (1.1) называется системой с ограниченным ресурсом, если функция

 (1.2)

Встречающиеся на практике системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами. Поскольку величина  – достаточно большое число, то включение (1.2) содержит все нелинейности из сектора 

Заметим систему (1.1) с нелинейностью





когда  можно привести к виду



где 

Положение равновесия системы (1.1), (1.2) определяется из решения алгебраических уравнений  Так как матрица  – гурвицева, то  где  только при  Отсюда следует, что система (1.1), (1.2) имеет единственное положение равновесия  если  Положению равновесия соответствует тривиальное решение  системы (1.1), (1.2).

Полагаем, что при достаточно малой окрестности точки  функцию  можно аппроксимировать линейной функцией  Следовательно, при  – достаточно малое число, уравнение возмущенного движения имеет вид



где  – предельное значение  определяемое из гурвицевости матрицы  Если матрица  – гурвицева, то существует число  такое, что  при  более того,  Таким образом, когда матрица  где  – гурвицева, тривиальное решение системы (1.1), (1.2) асимптотически устойчиво по Ляпунову при 

**Определение 1.** *Тривиальное решение  системы (1.1), (1.2) называется абсолютно устойчивым, если: 1) матрицы  – гурвицевы, где  2) для всех  – решение дифференциального уравнения (1.1) обладает свойством *

**Определение 2.** *Условиями абсолютной устойчивости системы (1.1), (1.2) называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы  при выполнении которых положение равновесия  (тривиальное решение ) абсолютно устойчиво.*

**Задача 1.** Найти условие абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1.1), (1.2).

Функция  является управлением сформированное по принципу обратной связи, а вектор строка  называется вектором обратной связи. Проблема Айзермана состоит в том, что как выбрать вектора обратной связи  чтобы из асимптотической устойчивости тривиального решения  линейной системы  для любого  следует абсолютная устойчивость тривиального решения  системы (1.1), (1.2), где  – предельное значение гурвицевости матрицы  – сколь угодно малое число.

**Определение 3.** *Будем считать, что в секторе  проблема Айзермана имеет решение, если: 1) существует вектор обратной связи  такой, что  где  – предельное значение гурвицевости матрицы  – сколь угодно малое число; 2) для любого  решение системы (1.1) асимптотически устойчиво; 3) для любого  тривиальное решение системы (1.1), (1.2) абсолютно устойчиво.*

**Задача 2.** Найти сектор  где проблема Айзермана имеет решение.

Отметим, что как следует из работы [11] проблема Айзермана не всегда имеет решение. Задача состоит в том: найти такой вектор обратной связи  чтобы в секторе  проблема Айзермана имела решение.

**Неособое преобразование.** Сведения о свойствах нелинейности содержатся в включении  Поэтому необходимо преобразовать уравнения движения (1.1) так, чтобы в явной форме представить функцию  через фазовые переменные системы. Как следует из постановки задачи требуется гурвицевость матриц  Следовательно, в неособом преобразовании должна быть учтена, по крайней мере, гурвицевость матрицы 

Кроме того, неособое преобразование должно быть такое, что в несобственных интегралах связанных с включением  подынтегральную функцию можно представить в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое является квадратичной формой, приведенной к диагональному виду, а второе слагаемое – полный дифференциал функции по времени. Такое представление подынтегральной функции в конечном счете приводит в легко проверяемым условиям абсолютной устойчивости.

Ниже приведено нелинейное преобразование исходного уравнения движения регулируемой системы (1.1) удовлетворяющее указанным требованиям. Следует отметить, что существующее неособое преобразование линейной системы из [12; § 5, теорема 2], основанное на управляемость пары  не удовлетворяет вышеперечисленным требованиям.

Характеристический полином матрицы  имеет вид:



где  – единичная матрица порядка  известные числа. Гурвицевость матрицы  легко определяется через коэффициенты  Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли,  Тогда



**Лемма 1.** *Пусть вектор строка  такая, что*

  *(1.3)*

*Тогда дифференциальное уравнение из (1.1) может быть представлено в виде*

* (1.4)*

*где *

**Доказательство.** *Рассмотрим первое уравнение из (1.1). Умножая слева на  имеем*

 (1.5)

в силу равенства  где 

Дифференцируя по  тождество (1.5), получим

 (1.6)

где  Аналогичным путем, с учетом соотношения (1.3), получим следующую систему дифференциальных уравнений

 (1.7)

где  Из (1.5) – (1.7) следует (1.4). Лемма доказана.

**Лемма 2.** *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

* (1.8)*

*порядка  равен  где  – знак транспонирования. Тогда:*

*1) существует вектор-строка  такая, что*

* (1.9)*

*2) Если  то *

**Доказательство.** Заметим, что ранг матрицы  тогда и только тогда, когда векторы  – линейно независимы. Поскольку векторы  образуют базис в  то вектор  может быть представлен однозначно в виде  Тогда



Теперь второе уравнение из (1.1) запишется в виде (1.9). Пусть вектор  Тогда



в силу (1.8). Так как матрица  несобая, то  Следовательно, при  Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 следует, что если выполнены равенства (1.3) и ранг  то дифференциальное уравнение (1.1) путем неособого преобразования  приводится к виду (1.4), где  запишется в виде (1.9).

Вводя обозначения



уравнения движения (1.4), (1.9) представим в виде

 (1.10)

Из (1.1), (1.10) следуют: 1)  2)  3) Матрицы  – подобные, следовательно,  4) 